代数幾何学シンポジウム記録
1999年度 pp.89-93

平面4次曲線の不変式論とワイル群 $W(E_7), W(E_6)$ の不変式論

塩田 徹治 (立教大学理学部)

1 昔

n 元 m次式の（群 SL_n に関する）不変式環を $S(n,m)$ とする。我々がここで扱うのは $n=3$、$m=4$の場合である。3元4次式 $F(x_0,x_1,x_2)=0$ は平面4次曲線をさだめ、それは特異点をもたないなら、種数3である。逆に、任意の種数3の代数曲線は超楕円的でないかぎり、平面4次曲線として実現される（いわゆる標準因子による埋め込みによる：故にこの実現の仕方は、射影変換を除いて一意的である）。従って、$S(3,4)$ の構造は、種数3の代数曲線のモジュライ空間 $\mathcal{M}_3$ と密接に関係している。

三十余年前私は、この不変式環 $S(3,4)$ について研究した。動機は種数2のモジュライ（と関連する2次のジーゲル・モジュラー形式）について、当時画期的だった Igusa の結果を、種数3の場合に拡張したいと思ったからである。また、やはり画期的で一世を風靡しつつあった Mumford の「幾何学的不変式論」(GIT) の一般論に、新たな具体的成果を加えたいと思ったこともある。

この（次数付き環）$S(3,4)$ について、まず加法的構造、即ち各斉次部分の次元の母関数（ポアンカレ級数）を、Weyl の指標公式を用いて決定した：

$$\frac{N(T)}{\prod_{d=1}^{6}(1-T^d)\cdot(1-T^9)} \quad (T=t^3)$$

$N(T)=1+T^3+T^4+T^5+2T^6+3T^7+2T^8+3T^9+4T^{10}+3T^{11}+4T^{12}+4T^{13}+3T^{14}+4T^{15}+3T^{16}+2T^{17}+3T^{18}+2T^{19}+T^{20}+T^{21}+T^{22}+T^{25}$.

この結果から環 $S=S(3,4)$ の構造について幾つかの推測（予想）ができる（[6, Appendix]）。とくに

（1） 7個の代数的に独立な不変式 $I_1, I_2, \ldots, I_6, I_9 (\deg I_d = 3d)$ が存在して、それらの生成する多項式環を P とすると、S は P の上に整 (integral) となる。

（2）S は、上の７個に６個の適当な元 $J_3, J_4, J_5, J_6, J_7, J_7'(\deg J_d = 3d)$ を加えた１３個の元で生成される。

（3）これらの生成元の間には１４個の基本関係式が存在する（以下略）。

しかしこれらの推測を証明すること（ましてそれを $\mathcal{M}_3$ の有理性の証明につなげることは）は難しく、私は目標を下げて $S(3,4)$ のかわりに、もう少し易しい対象 $S(2,8)$ を考察し、この環の構造定理を得た。これは、種数３の超楕円曲線のモジュライに対応する不変式環で、Igusa の結果を拡張する一つの方向であった([6])。

より最近、といっても既に十余年前になるが、Dixmier [2] が上の（1）を完全に証明した。コンピュータなしでできているのはすごい。

余談１：その少し前、１９８４／８５年にパリに半年滞在したとき、Dixmier に初めて会った。Raynaud が紹介してくれたのだが、Dixmier は私に、あの不変式論をやったシオダか、ときいた。別の分野（Operator algebra など）の大家と思っていた人からそうきかれて、ちょっと驚いた。はいと答えると、今でも興味をもっているか、ときく。その頃、私は代数的サイクルのことを主に考えていたので、あまり、と答えてしまったが、失敗だった。彼自身不変式を本気でやり始めていたのを知らなかったのだ。彼のはじめの問いは、私が [6] で Hilbert 以前の「古い」方法を使ったので、もっと年上と思われたのかもしれない。

余談２：E. Noether の最初の仕事は、３元４次式の不変式および共変式についての研究であった。Gordan から出されたこの問題に、彼女は成功したとはいいがたい。実際、そこでのネガティブな経験が、後年 Abstract Algebra の建設へ向かった彼女の原動力だったとの説がある。

可換環論の視点から不変式環が研究されたのは、上の二つの時期の中ごろ、７０年代からだっただろうか（[3] など）。しかしこれについてふれる余裕はない。

最近のコンピュータ (computer algebra) の発達により、具体的に不変式を書き下すことも可能になってきた。それと共に、「古い」方法も見直されているようである。

2 今

三十年ほどを経て再び、平面４次曲線の不変式論を考えてみることになった。そのきっかけは、最近十年ほど取り組んでいるモーデル・ヴェイユ格子の話に自然に、平面４次曲線の以下に述べるような標準形が登場したからである。その結果として、射影不変式環 $S(3,4)$ は、全く別種の（有限）ワイル群 $W(E_7)$ または $W(E_6)$ の不変式論と関係付けられることとなった。

非斉次座標 x, t を $(x_0 : x_1 : x_2) = (1 : x : t)$ となるように定める。このと

き、平面４次曲線のタイプ E_7 の標準形とは、

$$f_\lambda = x^3 + x(p_0 + p_1 t + t^3) + q_0 + q_1 t + q_2 t^2 + q_3 t^3 + q_4 t^4$$

$$\lambda = (p_0, p_1, q_0, \ldots, q_4) \in \mathbf{A}^7$$

であり、また、タイプ E_6 の標準形とは、

$$f_\lambda = x^3 + x(p_0 + p_1 t + p_2 t^2) + q_0 + q_1 t + q_2 t^2 + t^4$$

$$\lambda = (p_0, p_1, p_2, q_0, q_1, q_2) \in \mathbf{A}^6$$

である。

いずれの場合にも Γ_λ を $f_\lambda = 0$ によって定義される平面４次曲線とする。$(x_0 : x_1 : x_2) = (0 : 1 : 0)$ はその上の変曲点である。

[9, §1] で示したように、一つの変曲点を指定した平面４次曲線は上のいずれかの標準形に同型である。両者の区別は、考えている変曲点が、*ordinary* かまたは *special* か、即ち、変曲点における接線が Γ_λ と３重、または４重に接するかによるのである。

さて、各不変式 $I \in S(3,4)$ を標準形 f_λ で評価する写像 $I \to I(f_\lambda)$ が、環の準同型写像

$$\phi : S(3,4) \longrightarrow \mathbf{Q}[\lambda] = \mathbf{Q}[p_i, q_j]$$

を定義することは明らかである。これをタイプ E_7 または E_6 の評価写像とよび、ϕ_7 または ϕ_6 とかく。

説明が前後したが、モーデル・ヴェイユ格子の理論によれば、ワイル群 $W(E_r)$ の不変式環 $R(E_r)$ は、自然に $\mathbf{Q}[\lambda]$ と同一視される：それは、次数付き多項式環で、生成元 p_i、q_j の次数は
E_7 の場合： $wt(p_i) = 12 - 4i,\ wt(q_j) = 18 - 4j$
E_6 の場合： $wt(p_i) = 8 - 3i,\ wt(q_j) = 12 - 3j$
で定める([1], [7], [8] 参照)。

他方、$S = S(3,4) = \oplus_d S_d$ を斉次部分への分解とすると、$S_d \neq 0$ となるのは d が 3 の倍数のときに限る。

定理１ (i) タイプ E_7 の評価写像

$$\phi_7 : S(3,4) \longrightarrow R(E_7) = \mathbf{Q}[p_0, p_1, q_0, q_1, q_2, q_3, q_4]$$

は $S(3,4)$ から $R(E_7)$ へのウエイト比 $3:14$ の（つまり、すべての d について S_{3d} は $R(E_7)_{14d}$ にうつされる）単射準同型である。

(ii) $D \in S(3,4)$ を平面4次曲線の判別式とする（この不変式は $D \in S_{27}$ かつ $D(f) \neq 0$ となるのは $f = 0$ が非特異、という性質で特徴付けられる）。このとき, $\phi_7(D)$ は、定数倍を除き $R(E_7)$ の判別式 δ_7 に等しい。ここに、δ_7 は $W(E_7)$ の基本交代式の平方でウエイト126 である。

定理2 (i) タイプ E_6の評価写像

$$\phi_6 : S(3,4) \longrightarrow R(E_6) = \mathbf{Q}[p_0, p_1, p_2, q_0, q_1, q_2]$$

は $S(3,4)$ から $R(E_6)$ へのウエイト比3 : 8 の準同型である。

(ii) $D \in S(3,4)$ を平面4次曲線の判別式とするとき, $\phi_6(D)$ は定数倍を除き $R(E_6)$ の判別式 δ_6 に等しい。ここに、δ_6 は $W(E_6)$ の基本交代式の平方でウエイト72 である。

(iii) ϕ_6 は単射ではなく、$Ker(\phi_6)$ は次数６０の元を含む。（多分、生成元だろう）

証明は[12] を参照されたい。

References

[1] Bourbaki, N.: Groupes et Algèbres de Lie, Chap. 4,5 et 6, Hermann, Paris (1968); Masson (1981).

[2] Dixmier, J.: On the projective invariants of quartic plane curves, Adv. in Math. 64, 279–304 (1987).

[3] Hochster, M., Roberts, J.: Rings of invariants of reductive groups ..., Adv. in Math. 18, (1974).

[4] Katsylo, P.: Rationality of the moduli variety of curves of genus 3, Commemt. Math. Helv. 71, 507–524 (1996).

[5] Mumford, D.: Geometric Invariant Theory, Springer-Verlag, 1965; 3rd ed. (with J. Fogarty, F. Kirwan), 1994.

[6] Shioda, T.: On the graded ring of invariants of binary octavics, Am. J. Math. 89, 1022–1046 (1967).

[7] — : Construction of elliptic curves with high rank via the invariants of the Weyl groups, J. Math. Soc. Japan 43, 673-719 (1991).

[8] — : Theory of Mordell-Weil lattices, Proc. ICM Kyoto-1990, vol.I, 473-489 (1991).

[9] — : Plane quartics and Mordell-Weil lattices of type E_7, Comment. Math. Univ. St. Pauli 42, 61–79 (1993).

[10] — : Weierstrass transformations and cubic surfaces, Comment. Math. Univ. St. Pauli 44, 109–128 (1995).

[11] — : A uniform construction of the root lattices E_6, E_7, E_8 and their dual lattices, Proc. Japan Acad. 71A, 140–143 (1995).

[12] — : Some new observation on invariant theory of plane quartics, to appear in Kodaira volume in Asian J. Math.

[13] Schur, I. Vorlesungen *über* Invariantentheorie, Springer-Verlag, 1968.